



کد مدرسه

دفترچه شماره ۱

آزمون

۱۰

پایه

۱۲



مرکز سنجش آموزش مدارس برتر

تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۱۲/۱۰

# آزمون اختصاصی گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

مدت پاسخ‌گویی: ۷۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۰

عنوان مواد امتحانی آزمون اختصاصی گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی، تعداد، شماره سؤالات و مدت پاسخ‌گویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخ‌گویی
۱	حسابان	۱۸	۱	۱۸	۳۰ دقیقه
۲	هندسه	۱۲	۱۹	۳۰	۲۱ دقیقه
۳	گسسته	۱۰	۳۱	۴۰	۱۹ دقیقه

مواد امتحانی	سرفصل دهم	سرفصل یازدهم	سرفصل دوازدهم
حسابان	—	—	فصل ۵
هندسه	—	فصل ۳ (درس‌های ۳ و ۴)	فصل ۳ (درس ۲)
گسسته	—	فصل ۲ (درس‌های ۳ و ۴)	فصل ۳ (درس ۲)

تمامی حقوق مادی و معنوی آزمون، متعلق به مرکز سنجش آموزش مدارس برتر بوده و هرگونه استفاده از آن بدون داشتن اجازه‌نامه کتبی از این مرکز، خلاف قانون و عرف و قابل پیگیری می‌باشد.

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۴

ریاضیات

۱- تابع  $y = \frac{x+1}{1-x|x|}$  چند نقطه بحرانی دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

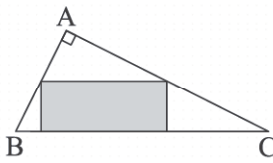
۲- اگر  $x = -1$  طول نقطه بحرانی تابع  $f(x) = 2x + a\sqrt{3+x^2}$  باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ۸ (۴) -۸

۳- بیشترین مقدار تابع  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + k$  در بازه  $[-1, 2]$  برابر ۱۲ است. کمترین مقدار  $f$  در این بازه چقدر است؟

- (۱) -۴ (۲) -۶ (۳) -۹ (۴) -۸

۴- در مثلث قائم‌الزاویه شکل زیر،  $AB = 2$  و  $AC = 4$  است. اگر مساحت مستطیل رنگ‌شده ماکزیمم باشد، نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟



- (۱)  $\frac{5}{4}$

- (۲)  $\frac{5}{2}$

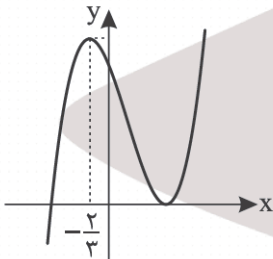
- (۳)  $\frac{3}{2}$

- (۴)  $\frac{3}{\sqrt{2}}$

۵- در یک استوانه، مجموع ارتفاع و قطر قاعده برابر ۱۲ است. بیشترین حجم استوانه چقدر است؟

- (۱)  $54\pi$  (۲)  $27\pi$  (۳)  $32\pi$  (۴)  $64\pi$

۶- نمودار تابع  $f(x) = x^3 + ax^2 - 4x + b$  به صورت زیر است. مقدار  $b$  کدام است؟



- (۱) ۸

- (۲) ۶

- (۳) ۴

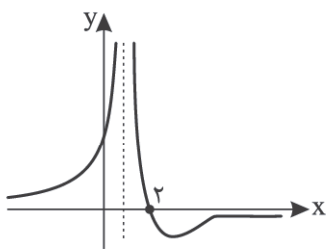
- (۴) ۲

۷- اگر نقطه اکسترمم نسبی تابع  $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+4}$  باشد، مقدار  $b$  و نوع اکسترمم کدام است؟

- (۱) ۶ و مینیمم (۲) ۶ و ماکزیمم (۳) -۴ و مینیمم (۴) -۴ و ماکزیمم

محل انجام محاسبات

۸- نمودار تابع  $f(x) = \frac{ax+b}{(x-1)^2}$  به صورت زیر است. عرض نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع  $f$ ، چند برابر  $a$  است؟



(۱)  $\frac{1}{3}$

(۲)  $\frac{1}{2}$

(۳)  $\frac{1}{4}$

(۴)  $\frac{1}{6}$

۹- تابع  $y = \frac{x^3}{x^2-3}$  در بازه  $(\alpha, \beta)$  اکیداً نزولی است. حداکثر  $\beta - \alpha$  کدام است؟

(۱)  $\sqrt{3}$  (۲)  $2\sqrt{3}$  (۳)  $3 - \sqrt{3}$  (۴) ۶

۱۰- در مورد تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع  $y = \frac{(x-1)|x|}{3x+1}$  کدام صحیح است؟

- (۱) دو ماکزیمم و یک مینیمم دارد. (۲) یک مینیمم و یک ماکزیمم دارد.  
 (۳) دو مینیمم و یک ماکزیمم دارد. (۴) دو ماکزیمم و دو مینیمم دارد.

۱۱- نقاط اکسترمم نسبی تابع  $f(x) = ax(x-3)^2 + b$  بر نیمساز ناحیهٔ اول واقع اند. حاصل  $a + b$  کدام است؟

(۱) ۲ (۲)  $\frac{3}{2}$  (۳)  $\frac{5}{2}$  (۴) ۴

۱۲- نقطهٔ  $A(-3, 3)$  یک اکسترمم نسبی تابع  $f(x) = ax^6 - x^3 + b$  است. عرض یکی از نقاط عطف این تابع کدام است؟

(۱)  $\frac{17}{4}$  (۲)  $\frac{33}{4}$  (۳)  $\frac{27}{4}$  (۴)  $\frac{1}{4}$

۱۳- در نقطهٔ  $x = 1$  تقعر تابع  $f(x) = (x+a)\sqrt[3]{x^2}$  عوض می‌شود. مقدار  $a$  کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۶

۱۴- در کدام بازهٔ زیر تقعر تابع  $f(x) = x^6 - 6x^2 + 5$  رو به بالا است؟

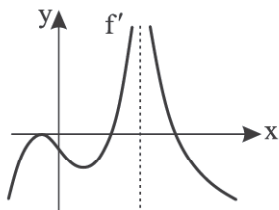
(۱)  $(0, 2)$  (۲)  $(2, 3)$  (۳)  $(-2, 0)$  (۴)  $(-1, 1)$

۱۵- در بازهٔ  $(a, b)$  تابع  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$  اکیداً نزولی و تقعر آن رو به بالا است. حداکثر  $b - a$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

محل انجام محاسبات

۱۶- نمودار مشتق تابع پیوسته  $f$  به صورت زیر است. تعداد نقاط اکسترمم نسبی و تعداد نقاط عطف تابع  $f$  از راست به چپ به ترتیب کدام است؟



(۱) ۲ و ۲

(۲) ۳ و ۲

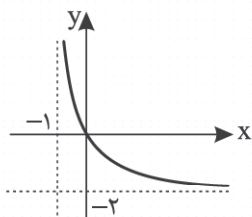
(۳) ۳ و ۱

(۴) ۱ و ۳

۱۷- خط مماس بر منحنی  $y = x^2(x + \alpha)$  در نقطه  $x = 2$ ، از منحنی عبور می‌کند. مقدار  $\alpha$  کدام است؟

(۱) ۶ (۲) -۶ (۳) ۳ (۴) -۳

۱۸- قسمتی از نمودار تابع هموگرافیک  $f$  به صورت زیر است. مقدار مینیمم نسبی تابع  $y = xf(x)$  کدام است؟



(۱) -۴

(۲) ۸

(۳) ۴

(۴) -۸

۱۹- در مثلث  $ABC$ ،  $BC = 6$  و میانه  $AM = 5$  بوده و نیمسازهای دو زاویه  $\hat{A}MB$  و  $\hat{A}MC$  دو ضلع دیگر را در نقاط  $E$  و  $F$  قطع می‌کنند. حاصل  $\sqrt{ME^2 + MF^2}$  برابر کدام است؟

(۱)  $\frac{15}{2}$  (۲)  $\frac{1}{5}$  (۳) ۴ (۴)  $\frac{15}{4}$

۲۰- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازه وتر  $\sqrt{10}$  و نسبت طول اضلاع قائمه  $\frac{1}{4}$  است. طول نیمساز زاویه قائمه این مثلث برابر کدام است؟

(۱)  $\frac{4}{3}$  (۲)  $\frac{\sqrt{10}}{4}$  (۳)  $\frac{\sqrt{8}}{3}$  (۴)  $\frac{1}{3}$

۲۱- نقطه  $G$  محل هم‌رسی میانه‌های مثلث  $ABC$  است. اگر  $AC = 26$ ،  $BM = 42$  و  $CN = \frac{22}{5}$  باشند، مساحت مثلث  $ABC$  برابر کدام است؟

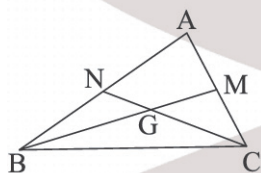
کدام است؟

(۱) ۵۰۴

(۲) ۸۴

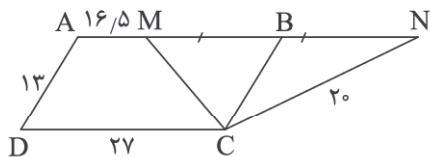
(۳) ۹۶

(۴) ۷۲



محل انجام محاسبات

۲۲- در متوازی‌الاضلاع ABCD شکل زیر، نقطه M روی ضلع AB به گونه‌ای قرار دارد که  $AM = \frac{16}{5}$  است. MB را به اندازه خودش تا امتداد داده‌ایم. اگر دوزنقه AMCD متساوی‌الساقین باشد، مساحت آن کدام است؟



- (۱) ۱۲۱
- (۲) ۱۲۶
- (۳) ۱۳۱
- (۴) ۲۶۱

۲۳- بردار  $\vec{a} = (1, -1, m)$  با محور z زاویه  $45^\circ$  می‌سازد. اگر  $\vec{b} \cdot \vec{i} = m^2$ ،  $\vec{b} \cdot \vec{j} = -m$  و  $\vec{b} \cdot \vec{k} = \sqrt{3}$  باشند، اندازه بردار  $\vec{b}$  چقدر است؟

- (۱) ۴
- (۲) ۳
- (۳)  $2\sqrt{2}$
- (۴)  $2\sqrt{3}$

۲۴- اگر بردار  $\vec{a} = (n, -1, k)$  در صفحه yz و برای دو بردار غیر صفر  $\vec{a}$  و  $\vec{b} = (m, 2, -2)$  رابطه  $|\vec{a}| + |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{b}|$  برقرار باشد، حاصل  $(m\vec{a} - \vec{b}) \cdot (k\vec{b} - \vec{a})$  کدام است؟

- (۱) -۱۲
- (۲) -۱۰
- (۳) -۴
- (۴) ۴

۲۵- نقاط  $A = (m, -2, 1)$  و  $B = (1, 2, -1)$  و  $C = (2, 0, 2)$  رئوس مثلث ABC هستند. اگر  $\hat{C} = 90^\circ$  باشد، آنگاه تصویر قائم  $\overline{AC}$  روی  $\overline{AB}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{6}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}$
- (۲)  $\frac{6}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{k}$
- (۳)  $\frac{6}{5}\vec{j} - \frac{3}{5}\vec{k}$
- (۴)  $4\vec{j} - 2\vec{k}$

۲۶- اگر  $x, y, z$  سه عدد حقیقی،  $x^2 + y^2 + z^2 = 68$  و عبارت  $3x - 2y + 2z$  حداکثر مقدار ممکن را داشته باشد، حاصل  $x + y + z$  کدام است؟

- (۱) ۲۴
- (۲) ۱۲
- (۳) ۶
- (۴) -۶

۲۷- اگر  $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ،  $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$  و  $\vec{c} = \vec{i} - \vec{k}$  باشند، طول تصویر قائم بردار  $\vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{c})$  بر محور y کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۵
- (۳) ۲
- (۴) ۳

۲۸- اگر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  دو بردار به ترتیب به طول‌های  $\sqrt{3}$  و  $\sqrt{2}$  باشند که با یکدیگر زاویه  $135^\circ$  درجه می‌سازند، اندازه بردار  $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{6}$
- (۲)  $2\sqrt{3}$
- (۳) ۳
- (۴) ۶

محل انجام محاسبات

۲۹- اگر  $|\vec{a}| = 1$ ،  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{9}{4}$  و  $|\vec{a} \times \vec{b}| = 6$  باشد، زاویه بین بردارهای  $2\vec{a}$  و  $3\vec{a} + 2\vec{b}$  چقدر است؟

- (۱)  $45^\circ$  (۲)  $30^\circ$  (۳)  $60^\circ$  (۴)  $15^\circ$

۳۰- مساحت مثلثی که توسط بردارهای  $(\frac{2\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|})$  و  $(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{2\vec{b}}{|\vec{b}|})$  ساخته می‌شود برابر  $\frac{49}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$  است. حجم متوازی‌السطوحی که

توسط بردارهای  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  و  $\vec{a} \times \vec{b}$  ایجاد می‌شود، برابر کدام است؟

- (۱) ۱۴۴ (۲) ۱۶۹ (۳) ۲۲۵ (۴) ۱۹۶

۳۱- خانواده‌ای ۴ فرزند دارد. اگر بدانیم بین فرزندان اول و دوم حداقل یکی دختر است، با کدام احتمال از فرزندان دوم و سوم حداکثر یکی پسر است؟

- (۱)  $\frac{7}{12}$  (۲)  $\frac{3}{4}$  (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{5}{6}$

۳۲- در کیسه A، ۴ توپ آبی و ۲ قرمز، در کیسه B، ۵ توپ آبی و در کیسه C، ۲ توپ آبی و ۳ توپ قرمز وجود دارد. یک توپ به تصادف از A خارج و به صورت تصادفی درون B یا C قرار می‌دهیم. یک توپ به تصادف از C خارج می‌کنیم. با کدام احتمال آبی است؟

- (۱)  $\frac{4}{9}$  (۲)  $\frac{11}{90}$  (۳)  $\frac{19}{45}$  (۴)  $\frac{3}{10}$

۳۳- فضای نمونه یک آزمایش تصادفی  $S = \{a, b, c, d, e\}$  می‌باشد. دو پیشامد  $A = \{a, b, c\}$  و  $B = \{b, c, e\}$  مستقل و  $P(A) = \frac{3}{5}$  و  $P(B) = \frac{1}{4}$  می‌باشد. حاصل  $P(\{a, d\} | \{b, c, d\})$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴)  $\frac{3}{8}$

۳۴- دو ظرف داریم اولی شامل ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و دومی شامل ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است. از ظرف اول به تصادف ۲ مهره به ظرف دوم انتقال می‌دهیم. سپس از ظرف دوم یک مهره خارج می‌کنیم. اگر مهره خارج شده سیاه باشد، احتمال اینکه متعلق به جعبه ظرف اول باشد کدام است؟

- (۱)  $\frac{7}{44}$  (۲)  $\frac{44}{81}$  (۳)  $\frac{2}{11}$  (۴)  $\frac{5}{22}$

۳۵- چند تابع پوشا مانند  $f$  از  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  به  $B = \{a, b, c\}$  می‌توان تعریف کرد به طوری که  $f(1) = f(2)$  باشد؟

- (۱) ۱۵۰ (۲) ۴۸ (۳) ۳۲ (۴) ۳۶

۳۶- ۸ نفر در یک مسابقه شرکت کرده‌اند. در ۳ مرحله قرعه‌کشی شده، در هر مرحله به یک نفر جایزه‌ای متمایز داده می‌شود. برنده‌ها به چند صورت ممکن است انتخاب شوند به طوری که به هر نفر حداکثر یک جایزه برسد؟

- (۱)  $8! - 3!$  (۲)  $\binom{8}{3}$  (۳)  $P(8, 5)$  (۴)  $P(8, 3)$

۳۷- معادله  $x + y + z = 17$  چند جواب صحیح و نامنفی دارد به طوری که هیچ کدام از متغیرها برابر ۲ نباشند؟

- ۱) ۱۶۲ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۷۱ (۴) ۱۲۶

۳۸- حداقل چند عدد از  $\{1, 2, \dots, 25\}$  انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم تفاضل دو تا از آنها برابر ۱۲ است؟

- ۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۳ (۴) ۱۵

۳۹- از ۵ مدرسه A, B, C, D, E به ترتیب ۸, ۶, ۵, ۴ و ۳ دانش آموز برای شرکت در اردو معرفی شده اند. از بین این دانش آموزان حداقل

چند نفر انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل ۴ نفر از یک مدرسه هستند؟

- ۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴) ۱۷

۴۰- ۳۷ نفر دانش آموزان یک کلاس به ۵ سوال پاسخ می دهند. پاسخ درست، غلط و نزده به ترتیب ۳ نمره مثبت، یک نمره منفی و صفر

نمره دارد. حداقل چند نفر از این دانش آموزان نمره یکسانی می گیرند؟

- ۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶